第 6 講　確率変数の和と積，二項分布

PART1　同時分布，確率変数の和の期待値

例題

100円硬貨2枚と10円硬貨3枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

練習

1 個のさいころを 3 回投げる。

(1)　出る目の和の期待値を求めよ。

(2)　1 回目は出た目を，2 回目は出た目を 3 倍したものを，3 回目は出た目を 10 倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，合計点数の期待値を求めよ。

第 6 講　PART1 確認問題

6 つの面のうち，1 つには 1，2 つには 2，3 つには 3 の数字が書かれたさいころがある。このさいころを 3 回投げるとする。

1　出る目の和の期待値は [ア] である。

2　1 回目は出た目を 2 倍したものを，2 回目は出た目を 3 倍したものを，3 回目は出た目を 4 倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，得られる合計点数の期待値は [イウ] である。

第 6 講　確率変数の和と積，二項分布

PART1　同時分布，確率変数の和の期待値

例題

100 円硬貨 2 枚と 10 円硬貨 3 枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

表が出た 100 円硬貨，10 円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1,\qquad E(Y)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot1+10\cdot\frac{3}{2}=115$$

練習

1 個のさいころを 3 回投げる。

(1)　出る目の和の期待値を求めよ。

(2)　1 回目は出た目を，2 回目は出た目を 3 倍したものを，3 回目は出た目を 10 倍したものをそれぞれ点数として得られるとき，合計点数の期待値を求めよ。

1 回目，2 回目，3 回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，確率変数 X，Y，Z の確率分布はいずれも下の表のようになる。

出る目	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

(1)　$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$

(2)　$E(X+3Y+10Z)=E(X)+3E(Y)+10E(Z)=\frac{7}{2}+3\cdot\frac{7}{2}+10\cdot\frac{7}{2}=49$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

1回目，2回目，3回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，確率変数 X，Y，Z の確率分布は，いずれも次の表のようになる。

出る目	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

したがって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}$$

$$=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

同様に，$E(Y)=E(Z)=\frac{7}{3}$

よって，出る目の和の期待値は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$ [A]

$$=\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}=\frac{21}{3}$$

$$=\mathbf{7}$$

[A]　確率変数の和の期待値
2つの確率変数 X，Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
3つの確率変数 X，Y，Z について
$E(X+Y+Z)$
$=E(X)+E(Y)+E(Z)$

2 **[正解]** イウ：21

[解説]

1回目，2回目，3回目の出る目をそれぞれ X，Y，Z とすると，

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=\frac{7}{3}$$

である。

得られる合計点数は $2X+3Y+4Z$ であるから，合計点数の期待値は

$$E(2X+3Y+4Z)=2E(X)+3E(Y)+4E(Z)$$

[B]

$$=2\cdot\frac{7}{3}+3\cdot\frac{7}{3}+4\cdot\frac{7}{3}=\frac{63}{3}$$

$$=\mathbf{21}$$

[B]　確率変数 X，Y と定数 a，b について
$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$
※3つ以上の確率変数においても同様のことが成り立つ。